Isométries planes

1 Transformations du plan

1.1 Définitions

Définition 1 Une **transformation** f du plan est une application du plan dans lui-même telle que pour tout point M' du plan, il existe un *unique* point M tel que $f(M) = M'$
On dit que M' est l'image de M par la transformation f, ou aussi que M est un antécédent de M' par f.

Remarque 1 Par définition, une transformation est une bijection

Définition 2 On dit que M est **fixe** (ou invariant) par la transformation f si $f(M) = M$

Définition 3 Si F est une figure du plan (un ensemble de points quelconque), on appelle **image de** F par f et on note $f(F)$ l'ensemble des points de la forme $f(M)$ lorsque M décrit F.
Si $f(F) = F$, on dit que F est **globalement invariante** par f.

Remarque 2 Dire que F est globalement invariante par f ne signifie pas que tous les points de F sont fixes par f.

- Un segment $[AB]$ est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[AB]$, mais seul le milieu de $[AB]$ est un point fixe par cette transformation.
- Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors que cette transformation n'a aucun point fixe.

Définition 4 La transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle la **transformation identique** ou **l'identité** et se note $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ ou Id.

Remarque 3 Pour cette transformation, tous les points sont invariants.

1.2 Composition

Définition 5 La transformation composée de f et de g, notée $f \circ g$, est la transformation qui à tout point M du plan associe le point $\boxed{(f \circ g)(M) = f[g(M)]}$.

Remarque 4 Si f, g et h sont trois transformations : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Remarque 5 En général $g \circ f \neq f \circ g$. Lorsque $g \circ f = f \circ g$, on dit que les transformations f et g **commutent**.

1.3 Transformation réciproque

Définition 6 La **réciproque** f^{-1} d'une transformation f est la transformation qui, à tout point N associe son unique antécédent par f.

$$f^{-1}(M) = N \Leftrightarrow M = f(N)$$

f^{-1} est une transformation et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$$

Théorème 1 Si f et g sont deux transformations, $f \circ g$ est une transformation et

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}.$$

Démonstration. Si on pose $g(M) = M'$ et $f(M') = M''$: $M = g^{-1}(M')$ et $M' = f^{-1}(M'')$.
D'où $g^{-1} \circ f^{-1}(M'') = g^{-1}\left[f^{-1}(M'')\right] = g^{-1}(M') = M$
et $f \circ g(M) = f[g(M)] = f(M') = M'' \Rightarrow M = (f \circ g)^{-1}(M'')$.

Remarque 6 Si $f \circ g = h$ alors $f = h \circ g^{-1}$ et $g = f^{-1} \circ h$

Remarque 7 Si $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$ alors $g = f^{-1}$

2 Isométries du plan

2.1 Définitions

Définition 7 Une isométrie du plan est une transformation du plan qui conserve les distances. Précisément, pour tous points A et B d'images respectives A' et B' : $A'B' = AB$.

Théorème 2 Si f est une isométrie du plan :

1. l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A) f(B)]$
2. l'image de la droite (AB) est la droite $(f(A) f(B))$
3. l'image du cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon R.
4. f conserve le parallélisme : deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
5. f conserve l'orthogonalité :
deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
6. f conserve les milieux : si I est milieu de $[AB]$, $f(I)$ est milieu de $[f(A) f(B)]$
7. f conserve les barycentres :
Si $G = \mathrm{bar}\{(A_1; \alpha_1); \cdots; (A_n; \alpha_n)\}$ alors $f(G) = \mathrm{bar}\{(f(A_1); \alpha_1); \cdots; (f(A_n); \alpha_n)\}$
8. f conserve les angles géométriques :
Si $A' = f(A); B' = f(B)$ et $C' = f(C)$: $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

Définition 8 Une isométrie qui conserve l'orientation des angles est un déplacement

Définition 9 Une isométrie qui inverse l'orientation des angles est un antidéplacement.

Théorème 3 La composée de **deux** déplacements ou de **deux** antidéplacements est un déplacement.

Théorème 4 La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement (peu importe l'ordre) est un antidéplacement.

2.2 Isométries usuelles

2.2.1 Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation notée $t_{\vec{u}}$ définie par

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Remarque 8 $t_{\vec{0}} = \mathrm{Id}$

Remarque 9 $\left.\begin{array}{r} M' = t_{\vec{u}}(M) \\ N' = t_{\vec{u}}(N) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Théorème 5 $\boxed{(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}}$

Théorème 6 Une translation est un déplacement qui n'a aucun point fixe.

2.2.2 Réflexion (ou symétrie orthogonale)

Soit Δ une droite du plan. La réflexion d'axe Δ est la transformation notée s_Δ définie par

$$M' = s_\Delta(M) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} M' = M \text{ si } M \in \Delta \\ \Delta \text{ médiatrice de } [MM'] \text{ si } M \notin \Delta \end{array}\right.$$

Théorème 7 $\boxed{s_\Delta \circ s_\Delta = \mathrm{Id}}$ $\boxed{s_\Delta^{-1} = s_\Delta}$

Théorème 8 Une réflexion est un antidéplacement qui a pour point fixe tout point de Δ.

2.2.3 Rotation

Soit ω un point du plan et soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre ω et d'angle θ est la transformation notée $r_{\omega;\theta}$ définie par

$$r_\omega;\theta(M) = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega M' = \omega M \\ \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta \end{array}\right.$$

Remarque 10 $r_{\omega;\pi} = s_\omega$ symétrie de centre ω.

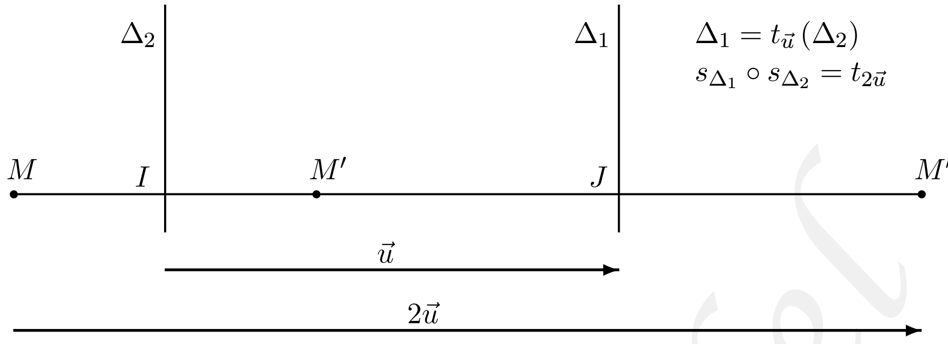
Remarque 11 Si $M' = r_{\omega;\theta}(M)$ et $N' = r_{\omega;\theta}(N)$: $\left(\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega N'}\right) = \left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega N}\right)$

Théorème 9 $\boxed{(r_{\omega;\theta})^{-1} = r_{\omega;-\theta}}$

Théorème 10 Une rotation est un déplacement qui a pour seul point fixe le centre de la rotation.

3 Composée de deux réflexions d'axes Δ_1 et Δ_2

3.1 Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont parallèles



Théorème 11 Si s_{Δ_1} et s_{Δ_2} sont deux réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 tels que $\Delta_1 \| \Delta_2$, la composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$ avec $\vec{u}$ tel que $\Delta_1 = t_{\vec{u}}(\Delta_2)$

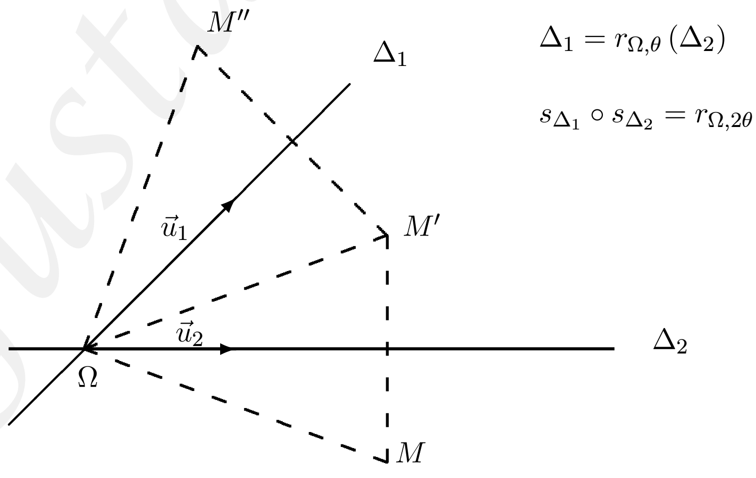
Démonstration. Soient $M' = s_{\Delta_2}(M)$; $M'' = s_{\Delta_1}(M')$; I et J les milieux respectifs de $[MM']$ et $[M'M'']$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'} \\ \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow M'' = t_{2\vec{u}}(M) \text{ en notant } \vec{u} = \overrightarrow{IJ}.$$

Remarque 12 $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = t_{-2\vec{u}}$ et donc, sauf dans le cas où $\Delta_1 = \Delta_2$: $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \neq s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$

Remarque 13 Toute translation de vecteur $\vec{v}$ peut être décomposée d'une infinité de façons comme composée de deux réflexions dont les axes sont normaux à $\vec{v}$, l'un d'eux pouvant être choisi arbitrairement.

3.2 Cas où les axes Δ_1 et Δ_2 sont sécants en Ω



Théorème 12 Soient s_{Δ_1} et s_{Δ_2} deux réflexions d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 sécants en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. La composée $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$.

Démonstration. Soit $M' = s_{\Delta_2}(M)$; $M'' = s_{\Delta_1}(M')$.
$s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}(\Omega) = s_{\Delta_1}(\Omega) = \Omega$.
s_{Δ_1} et s_{Δ_2} étant des isométries : $\Omega M' = \Omega M$ et $\Omega M'' = \Omega M'$. Donc $\Omega M'' = \Omega M$
Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des vecteurs directeurs respectifs deΔ_1 et Δ_2.
$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}_2\right) + (\vec{u}_2, \vec{u}_1) + \left(\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M''}\right)$
Une réflexion étant un antidéplacement :
$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}_2\right) = -\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u}_2\right)$ et $\left(\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M''}\right) = -\left(\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.
Donc $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) = -\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \vec{u}_2\right) + (\vec{u}_2, \vec{u}_1) - \left(\vec{u}_1, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = 2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$ d'après la relation de Chasles sur les angles orientés.
Donc $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

Remarque 14 L'angle $2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$ dépend des droites Δ_1 et Δ_2 mais pas des vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ choisis sur ces droites. Si par exemple on remplace $\vec{u}_1$ par $-\vec{u}_1$, on a : $2(-\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2(-\vec{u}_1, \vec{u}_1) + 2(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \quad [2\pi]$ car $(-\vec{u}_1, \vec{u}_1) = \pi \quad [2\pi]$.

Remarque 15 Sauf dans le cas où $\Delta_1 \perp \Delta_2$ et où $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} = s_\Omega$ (symétrie centrale de centre Ω, s_{Δ_1} et s_{Δ_2} ne commutent pas : $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ est une rotation d'angle $2(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$ et $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ est une rotation d'angle $2(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Remarque 16 Toute rotation peut donc être décomposée, d'une infinité de manières différentes possibles, comme la composée de deux symétries axiales d'axes sécants au centre de cette rotation.

Exemple 1 Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité G.
On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soit $C'' = t_{\overrightarrow{A'A}}(C)$.

1. $r_{A,\pi/3} \circ r_{B,\pi/3} = s_{(AA')} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(BB')} = s_{(AA')} \circ s_{(BB')} = r_{G,-4\pi/3}$
   car $(AA') = r_{G,-2\pi/3}((BB'))$

2. $r_{C,-\pi/3} \circ r_{A,\pi/3} = s_{(CC'')} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AA')} = s_{(CC'')} \circ s_{(AA')} = t_{\overrightarrow{BC}}$
   car $(CC'') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA')$

3. $t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{A',\pi} = s_{(CC'')} \circ s_{(AA')} \circ s_{(AA')} \circ s_{(BC)} = s_{(CC'')} \circ s_{(BC)} = r_{C,\pi} = s_C$

4 Isométries du plan fixant un point

Théorème 13 Soit f une isométrie et Ω un point du plan. L'isométrie f se décompose d'une manière unique sous la forme $f = t \circ g$, où t désigne une translation et g désigne une isométrie laissant Ω fixe.

Démonstration. Soit $f = t \circ g$ une telle décomposition (en supposant qu'elle existe).
On doit avoir $\Omega' = f(\Omega) = (t \circ g)(\Omega) = t(\Omega)$. La translation t ne peut donc être que la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$. De plus $f = t \circ g$ d'où $g = t^{-1} \circ f$.
Donc la décomposition $f = t \circ g$ est, si elle existe, unique.
Posons maintenant $t = t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$ et $g = t^{-1} \circ f$.
g est bien une isométrie comme la composée de deux isométries.
De plus $g(\Omega) = \left(t^{-1} \circ f\right)(\Omega) = t^{-1}(f(\Omega)) = \Omega$ donc Ω est bien un point fixe de g.
Finalement $t \circ g = t \circ \left(t^{-1} \circ f\right) = t \circ t^{-1} \circ f = f$.
Ceci montre l'existence de la décomposition citée dans le théorème.
Le théorème montre qu'une isométrie quelconque peut toujours être obtenue, et ce d'une infinité de manières (le choix de Ω est libre), comme composée d'une isométrie laissant un point fixe et d'une translation.

Théorème 14

1. Une isométrie fixant trois points A, B et C non alignés est l'identité.
2. Une isométrie distincte de l'identité fixant au moins deux points distincts A et B est la symétrie axiale d'axe (AB).
3. Une isométrie ne fixant que le point A est une rotation de centre A et d'angle non nul.

Démonstration. Soit f une isométrie.
1) Supposons que f fixe trois points A, B et C non alignés.
Soit M un point quelconque du plan et soit $M' = f(M)$.
f conservant les distances, on doit avoir $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$.
Si $M \neq M'$, les trois points A, B et C devraient être tous les trois sur la médiatrice de $[MM']$, ce qui est impossible puisqu'ils ne sont pas alignés.
On a donc $M = M'$ et tous les points sont donc fixes : $f = \mathrm{Id}$.
2) Supposons que f fixe deux points A et B distincts.
Soit C un point qui n'est pas sur la droite (AB).
D'après 1), $f(C) = C' \neq C$ sinon on aurait $f = \mathrm{Id}$.
f conservant les distances, on doit avoir $AC = AC'$et $BC = BC'$
Donc la droite (AB) est la médiatrice de $[CC']$.
Soit $g = s_{(AB)} \circ f$.
On a $g(A) = A$, $g(B) = B$ et $g(C) = s_{(AB)}(f(C)) = s_{(AB)}(C') = C$.
D'après 1) : $g = s_{(AB)} \circ f = \mathrm{Id}$
d'où $f = s_{(AB)} \circ \mathrm{Id} = s_{(AB)}$.
3) Supposons que f ne fixe que le point A. Soit B un point distinct de A, $B' = f(B)$.
f conservant les distances, $AB = AB'$, donc $A \in \Delta$. où Δ est la médiatrice de $[BB']$.
Soit $g = s_\Delta \circ f$. On a $g(A) = s_\Delta(f(A)) = s_\Delta(A) = A$ et $g(B) = s_\Delta(f(B)) = s_\Delta(B') = B$.
On peut donc appliquer à g ce que l'on a montré dans la partie 1) ou la partie 2).
Si g était l'identité, on aurait $f = s_\Delta$ ce qui est impossible puisque f n'a qu'un seul point fixe.
Donc $g = s_\Delta \circ f = s_{(AB)}$ d'où $f = s_\Delta \circ s_{(AB)}$.
Les droites Δ et (AB) étant sécantes en A, f est une rotation de centre A.

5 Déplacements du plan

Soit f un déplacement du plan.

1. Si f fixe un point, ce ne peut être que l'identité ou une rotation.
2. Si f ne fixe aucun point, alors $f = t \circ g$ avec g fixant un point.
   $g = t^{-1} \circ f$ est un déplacement fixant un point. C'est donc l'identité ou une rotation.
   (a) Si g est l'identité, $f = t \circ \mathrm{Id} = t$.
   (b) Si g est une rotation r : $f = t \circ r$.
   Décomposons t et r en produit de réflexions bien choisies. $t = s_1 \circ s_2$ et $r = s_2 \circ s_3$.
   Alors $t \circ r = s_1 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_3 = s_1 \circ s_3$ est donc une translation ou une rotation

Théorème 15 Les déplacements du plan sont les translations et les rotations

6 Antidéplacements du plan

Soit f un antidéplacement du plan.

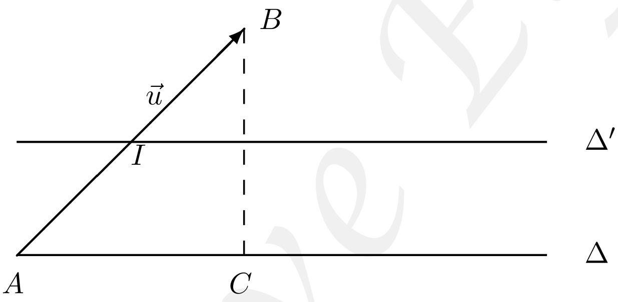
1. Si f fixe point, ce ne peut être qu'une réflexion
2. Si f ne fixe aucun point, alors $f = t \circ g$ avec g fixant un point.
   $g = t^{-1} \circ f$ est un antidéplacement fixant un point. C'est donc une réflexion s.
   Alors : $f = t \circ s$

Théorème 16 Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les composées $t \circ s$ ou t est une translation et s une réflexion.

Définition 10 Une symétrie glissée est la composition d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion d'axe Δ dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. On note $s_{\Delta,\vec{u}}$

Théorème 17 La composée d'une translation et d'une réflexion est une réflexion ou une symétrie glissée

Démonstration.



Soit $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$. Soit $A \in \Delta$, B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, soit C la projection orthogonale de B sur Δ et soit Δ' la parallèle à Δ passant par le milieu I de $[AB]$.

$$\left.\begin{array}{r} t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{CB}} \\ t_{\overrightarrow{CB}} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'} \circ s_\Delta \circ s_\Delta = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'}$$

1. $\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow f = s_{\Delta'}$
2. $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ s_{\Delta'}$ avec $\overrightarrow{AC}$ directeur de Δ'. Donc f est la symétrie glissée $s_{\Delta',\overrightarrow{AC}}$

Théorème 18 $s_{\Delta,\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

Démonstration. $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est un antidéplacement.
Si $M \in \Delta$ posons $M_1 = t_{-\vec{u}}(M)$. On a donc $\overrightarrow{MM_1} = -\vec{u}$.
$\vec{u}$ étant directeur de Δ : $M_1 \in \Delta$.
D'où $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}(M) = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta(M_1) = t_{\vec{u}}(M_1) = M$ car $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$.
$t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}}$ est donc un antidéplacement fixant tout point de Δ.
Donc $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ t_{-\vec{u}} = s_\Delta$ d'où $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

Remarque 17 Si f est une réflexion : $f \circ f = \mathrm{Id}$

Remarque 18 Si f est la symétrie glissée $s_{\Delta,\vec{u}}$: $f \circ f = t_{2\vec{u}}$
De plus, $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \Rightarrow s_\Delta = t_{-\vec{u}} \circ f$ permet de déterminer Δ

Théorème 19 Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les symétries glissées.

7 Ecriture complexe des déplacements

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

7.1 Ecriture complexe des translations

La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ associe, à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe

$$z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$$

Démonstration. $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}}$

7.2 Ecriture complexe des rotations

La rotation $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ associe, à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe

$$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$$

Démonstration. Si $z = z_\Omega$, la formule proposée donne bien $z' = z_\Omega$.
Si $z \neq z_\Omega$: $\Omega M' = \Omega M \Rightarrow \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \Rightarrow \dfrac{|z' - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = 1 \Rightarrow \left|\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| = 1$
$\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \Rightarrow \arg\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \theta$
$\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}$ a pour module 1 et pour argument θ. Donc $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$ d'où le résultat.

7.3 Synthèse

Théorème 20 L'écriture complexe d'un déplacement est

$$z' = az + b \text{ avec } |a| = 1$$

Réciproquement, si une transformation f du plan a une écriture complexe de la forme $z' = az+b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$, alors f est une translation ou une rotation.
En effet, si $a = 1$, $z' = z + b$, il s'agit de la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
Si $a \neq 1$ le point Ω d'affixe z_Ω est point fixe de f si et seulement si $z_\Omega = az_\Omega + b$.
En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = az + b \\ z_\Omega = az_\Omega + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$
a étant de module 1, on peut écrire $a = e^{i\theta}$.
Donc $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$. D'où $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.
On reconnaît la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Théorème 21 $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ est l'écriture complexe d'un déplacement.

1. Si $a = 1$ ce déplacement est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
2. Si $a \neq 1$ ce déplacement est une rotation de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle $\arg(a)\ [2\pi]$

7.4 Applications

7.4.1 Composée de deux rotations

Soient f et g deux rotations d'écritures complexes respectives $z' = e^{i\alpha}z + b_1$ et $z' = e^{i\beta}z + b_2$, la transformation $f \circ g$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$$z'' = e^{i\alpha}(e^{i\beta}z + b_2) + b_1 = e^{i(\alpha+\beta)}z + \left(e^{i\alpha}b_2 + b_1\right)$$

C'est une transformation dont l'expression complexe est bien de la forme $z'' = Az + B$ avec $|A| = 1$.
Si $\alpha + \beta = 0 \quad [2\pi]$, $A = 1$ et $f \circ g$ est une translation.
Si $\alpha + \beta \neq 0 \quad [2\pi]$, $A \neq 1$ et $f \circ g$ est une rotation d'angle $\alpha + \beta$.

7.4.2 Composée d'une rotation et d'une translation

Soit f la rotation d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + b_1$
Soit g la translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.
La transformation $f \circ g$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = e^{i\theta}\left(z + b_2\right) + b_1 = e^{i\theta}z + \left(e^{i\theta}b_2 + b_1\right)$.
Donc $f \circ g$ est une rotation d'angle θ.

7.4.3 Composée d'une translation et d'une rotation

Soit f la translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$
Soit g la rotation d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}z + b_2$
La transformation $f \circ g$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = e^{i\theta}z + b_2 + b_1$.
$f \circ g$ est donc une rotation d'angle θ.

8 Ecriture complexe des antidéplacements

8.1 Ecriture complexe des réflexions d'axe "Ox"

Théorème 22 $\Delta_0 = (O; \vec{e}_1)$ étant l'axe des abscisses, la réflexion d'axe Δ_0 a pour écriture complexe

$$z' = \bar{z}$$

Démonstration. Soit M d'affixe z, $M' = s_{\Delta_0}(M)$ d'affixe z'.
Si $M \notin \Delta_0 : OM' = OM$ et $\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM'}\right) = -\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right)$
D'où $|z'| = |z|$ et $\arg(z') = -\arg(z) = \arg(\bar{z})$.
On en déduit $\left|\dfrac{z'}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|} = \dfrac{|z'|}{|\bar{z}|} = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z'}{\bar{z}}\right) = 0$ d'où $\dfrac{z'}{\bar{z}} = 1$ puis $z' = \bar{z}$
Si $M \in \Delta_0 : M' = M$ et donc $z' = z = \bar{z}$ puisque $z \in \mathbb{R}$ (M est sur l'axe des abscisses)

8.2 Ecriture complexe des réflexions d'axe horizontal

Théorème 23 Δ étant la droite d'équation $y = b$, la réflexion d'axe Δ a pour écriture complexe

$$z' = \bar{z} + 2b$$

Démonstration. Soit s_Δ la réflexion d'axe Δ d'équation $y = b$.
Soit B le point d'affixe ib et soit $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$.
$\Delta = t_{\vec{u}}(\Delta_0)$ où Δ_0 désigne l'axe des abscisses.
$s_\Delta \circ s_{\Delta_0} = t_{2\vec{u}} \Rightarrow s_\Delta = t_{2\vec{u}} \circ s_{\Delta_0}$
L'écriture complexe de s_{Δ_0} est $z' = \bar{z}$, celle de $t_{2\vec{u}}$ est $z' = z + z_{2\vec{u}} = z + 2z_{\vec{u}} = z + 2ib$
D'où l'écriture complexe de $s_\Delta = z' = \bar{z} + 2ib$

8.3 Ecriture complexe d'une réflexion d'axe non "horizontal"

Théorème 24 Si la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}$ et coupe l'axe des abscisses au point Ω, l'écriture complexe de la réflexion s_Δ d'axe Δ est, en notant $\theta = (\vec{e}_1, \vec{v})$:

$$z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \bar{z}_\Omega) + z_\Omega$$

Démonstration. Soit s_{Δ_0} la réflexion d'axe $\Delta_0 = (O; \vec{e}_1)$.
$s_\Delta \circ s_{\Delta_0} = r_{\Omega,2\theta} \Rightarrow s_\Delta = r_{\Omega,2\theta} \circ s_{\Delta_0}$
L'écriture complexe de $r_{\Omega,2\theta}$ est $z' = e^{i2\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$ et celle de s_{Δ_0} est $z' = \bar{z}$.
Donc l'écriture complexe de s_Δ est $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \bar{z}_\Omega) + z_\Omega$

8.4 Ecriture complexe des symétries glissées

Théorème 25 Si la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}$ et coupe l'axe des abscisses au point Ω, l'écriture complexe de la *symétrie glissée* $s_{\Delta,\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_\Delta$ est, en notant $\theta = (\vec{e}_1, \vec{v})$:

$$z' = e^{i2\theta}(\overline{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega + z_{\overrightarrow{u}}$$

Démonstration. L'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$ est $z' = z + z_{\vec{u}}$ et celle de s_Δ est $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \bar{z}_\Omega) + z_\Omega$

8.5 Synthèse

Théorème 26 L'écriture complexe des antidéplacements est

$$z' = a\bar{z} + b \text{ avec } |a| = 1$$

Réciproquement, soit f la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$
Soit s la réflexion d'écriture complexe $z' = \bar{z}$ (c'est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses)
Soit g le déplacement d'écriture complexe $z' = az + b$.
Alors $f = g \circ s$ et donc f est un antidéplacement (composée d'un déplacement et d'un antidéplacement).

Théorème 27 $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$ est l'écriture complexe d'un antidéplacement.

8.6 Applications

On peut utiliser les écritures complexes pour déterminer les composées de deux réflexions ou d'un antidéplacement et d'une translation par exemple.