Transformations du plan FICHE 1

Dans ce cours, on va étudier des *transformations* du plan P :

Une *transformation* *f* du plan est une fonction du plan dans lui-même qui, à tout point *M* associe un point M' bien défini.

$$f : M \mapsto M'$$
$$P \to P$$

Si $f(M) = M'$ on dit que M' est *l'image* de *M* par la transformation *f*, ou aussi que *M* est un *antécédent* de M' par *f*.
Si, pour un certain point *M* du plan, $f(M) = M$, on dit que *M* est un point *fixe*, ou *invariant* de la transformation *f*.

Si *F* est une figure du plan (un ensemble de points quelconque), on appelle *image de F par f* et on note $f(F)$ l'ensemble des points de la forme $f(M)$ lorsque *M* décrit *F*.
Si $f(F) = F$, on dit que *F* est *globalement invariante* par *f*. Cela ne signifie pas forcément que tous les points de *F* sont fixes par *f*.
Exemples : Un segment $[AB]$ est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de $[AB]$, mais seul le milieu de $[AB]$ est un point fixe par cette transformation.
Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors que cette transformation n'a aucun point fixe.
Soient *F* et F' deux figures et *f* une transformation. Si l'on prouve que, quel que soit le point *M* de *F*, $f(M)$ appartient à F', on aura prouvé que $f(F) \subset F'$. Si l'on doit prouver que $f(F) = F'$ il reste à prouver que tout point de F' est bien l'image d'au moins un point de *F*.

Exemple : La transformation qui, à tout point *M* du plan associe le point *M* lui-même s'appelle la *transformation identique*, ou *l'identité*, et se note *id*.
Pour cette transformation, tous les points sont *invariants.*

Étant données deux transformations *f* et *g*, on peut définir la *transformation composée* de *f* et de *g* :

La transformation *composée* de *f* et de *g*, notée gof , est la transformation qui à tout point *M* du plan associe le point $(gof)(M) = g\big(f(M)\big)$.

Si $f : M \mapsto M'$ $g : M' \mapsto M''$, alors $gof : M \mapsto M''$.
En effet $(gof)(M) = g\big(f(M)\big) = g(M') = M''$.
Si *f*, *g* et *h* sont trois transformations : $(hog)of = ho(gof)$.
En général $gof \neq fog$. Lorsque $gof = fog$, on dit que les transformations *f* et *g* *commutent*.

De plus toutes les transformations considérées par la suite seront *bijectives*.

Une transformation *f* du plan est *bijective* (ou une bijection) si tout point *N* du plan a un antécédent unique par *f*.

Contre-exemple : Soit D une droite et p la projection orthogonale sur D.
p est une transformation qui n'est pas bijective. En effet, tous les points de D ont une infinité d'antécédents alors que les points qui ne sont pas sur D n'ont aucun antécédent.

Le caractère bijectif d'une transformation f permet de définir sa *réciproque* f^{-1}.

La *réciproque* f^{-1} d'une transformation bijective f est la transformation qui, à tout point N associe son unique antécédent par f.

f^{-1} est une transformation bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. $fof^{-1} = f^{-1}of = id$.
Si f et g sont deux transformations bijectives, gof est bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.
En effet, soit M'' un point quelconque du plan, M' son unique antécédent par g et M l'unique antécédent de M' par f. M est l'unique antécédent de M'' par gof :
$f : M \mapsto M'$ $g : M' \mapsto M''$, alors $gof : M \mapsto M''$.
De plus : $\left(f^{-1}og^{-1}\right)(M'') = f^{-1}\left(g^{-1}(M'')\right) = f^{-1}(M') = M$; on a donc bien $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

Dans la suite de ce cours, « transformation » signifiera pour nous « transformation bijective ».

Isométries du plan : les définitions

FICHE 2

Les premières transformations auxquelles on va s'intéresser sont les *isométries*.

Une *isométrie* f du plan est une transformation du plan qui conserve les distances, c'est-à-dire que : pour tous les points M et N du plan, si M' et N' désignent leurs images par f, on aura $MN = M'N'$.

On peut démontrer que les isométries transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.
Plus précisément, f désignant une isométrie :
l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$; ces deux segments ont la même longueur ;
l'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$;
l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre $f(A)$ et de rayon r.

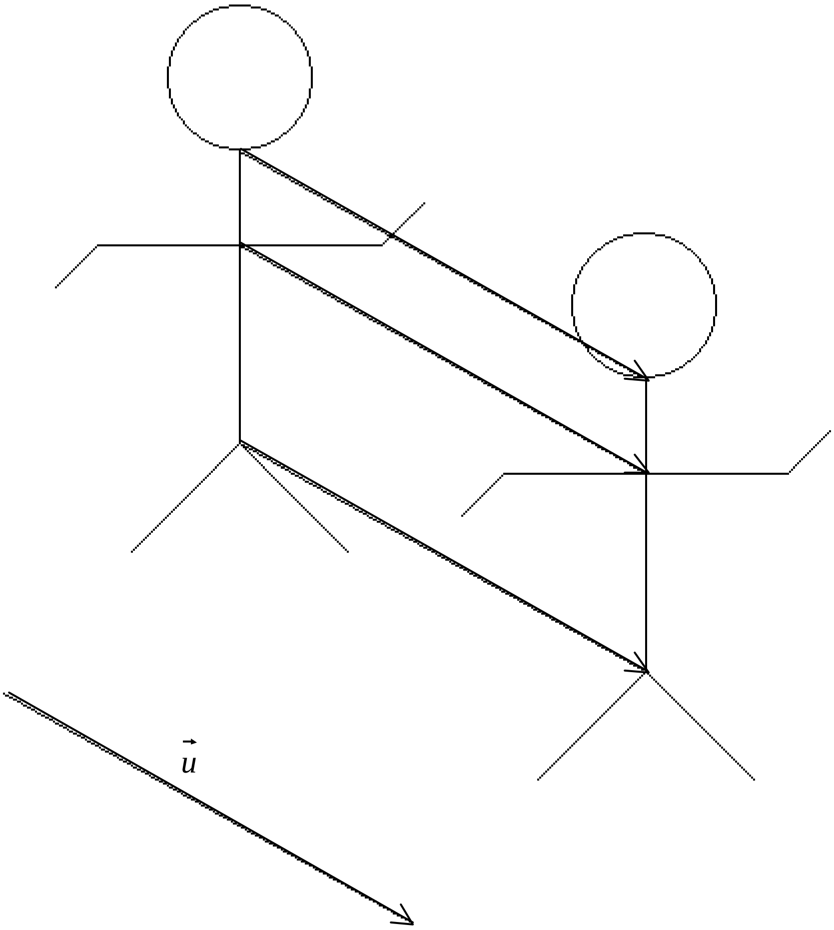
On dit que les isométries *conservent le parallélisme* parce que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
On dit qu'elles *conservent la perpendicularité* parce que les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
On dit qu'elles *conservent les milieux* parce que si I est le milieu du segment $[AB]$ $f(I)$ est le milieu de $[f(A)f(B)]$.
Plus généralement les isométries *conservent les barycentres*.
Cela signifie que si G est le barycentre des points pondérés $(A_1\,;\alpha_1)$, $(A_2\,;\alpha_2)$ ... $(A_k\,;\alpha_k)$, son image $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A_1)\,;\alpha_1)$, $(f(A_2)\,;\alpha_2)$ ... $(f(A_k)\,;\alpha_k)$.
On dit qu'elles *conservent les angles non orientés* parce que si l'on ne tient pas compte de l'orientation les angles $A\hat{B}C$ et $A'\hat{B}'C'$ sont égaux (A, B et C désignent des points distincts et A', B' et C' désignant leurs images.

Les isométries qui conservent l'orientation des angles s'appellent des *déplacements.*
Les isométries qui renversent l'orientation des angles s'appellent des *antidéplacements* ou des *retournements*..
La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, ou d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.

Il apparaîtra dans ce cours qu'il existe dans le plan quatre sortes d'isométries : les *translations*, les *rotations*, les *symétries axiales* et les *symétries glissées*.
Les translations et les rotations sont des déplacements, les symétries axiales et les symétries glissées sont des antidéplacements.

Voici les définitions correspondantes :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La *translation* de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

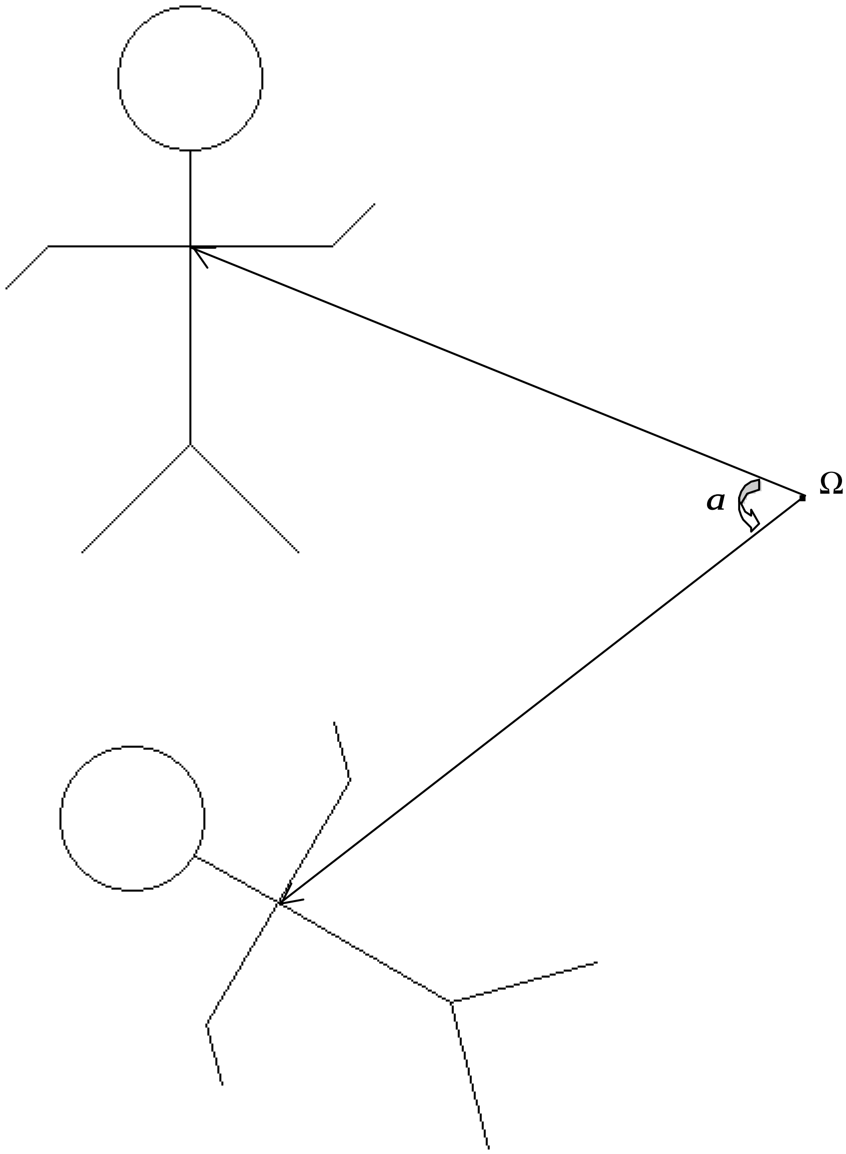


La réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$: $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
La composée de deux translations est une translation : $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} o t_{\vec{u}}$.
La translation de vecteur $\vec{0}$ est l'identité : $t_{\vec{0}} = id$.
Une translation autre que *id* n'a pas de point fixe.

Soit Ω un point du plan et α un angle orienté. La *rotation* de centre Ω et d'angle α, notée $r_{\Omega;\alpha}$ est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $M' = M$ si $M = \Omega$ et tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha$ sinon.

Si $\alpha = 0\ [2\pi]$, $r_{\Omega;\alpha}$ est l'identité. Si $\alpha \neq 0\ [2\pi]$, $r_{\Omega;\alpha}$ n'a que Ω comme point fixe.
Si $\alpha = \pi\ [2\pi]$, $r_{\Omega;\alpha}$ est la *symétrie centrale* de centre Ω, notée s_{Ω} .
La réciproque de la rotation de centre Ω et d'angle α est la rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$: $r_{\Omega;\alpha}^{-1} = r_{\Omega;-\alpha}$.
Il est facile de composer deux rotations de même centre : $r_{\Omega;\alpha} o r_{\Omega;\beta} = r_{\Omega;\alpha+\beta} = r_{\Omega;\beta} o r_{\Omega;\alpha}$.

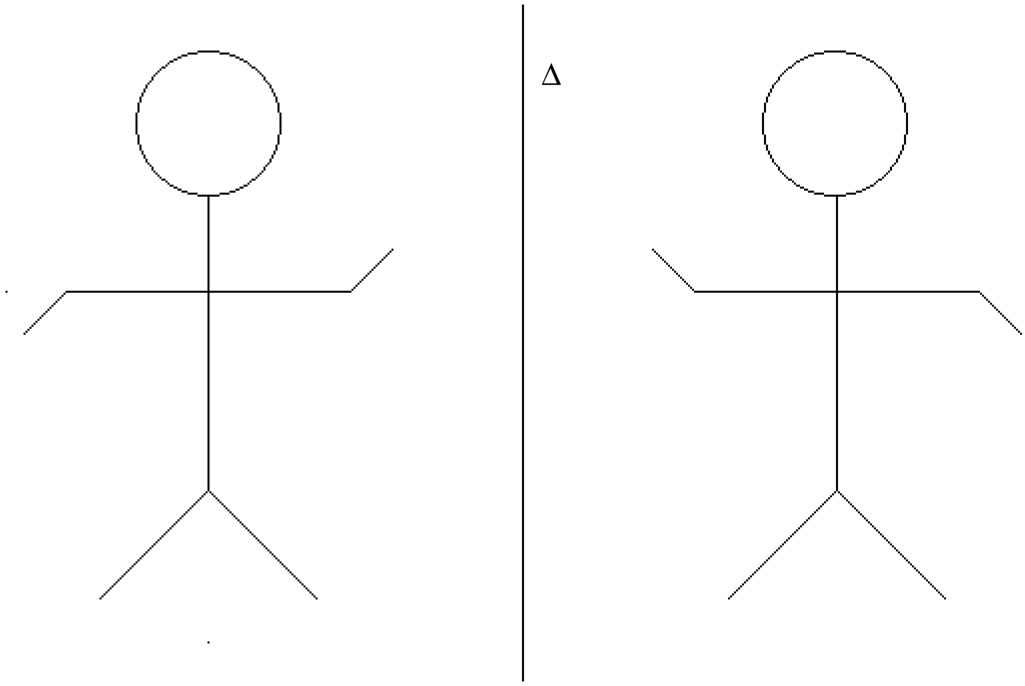
En particulier $s_\Omega o s_\Omega = id$: $s_\Omega^{-1} = s_\Omega$.



Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan, et A' et B' leurs images respectives par $r_{\Omega;a}$, on aura : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}\right) = \boldsymbol{a}$.

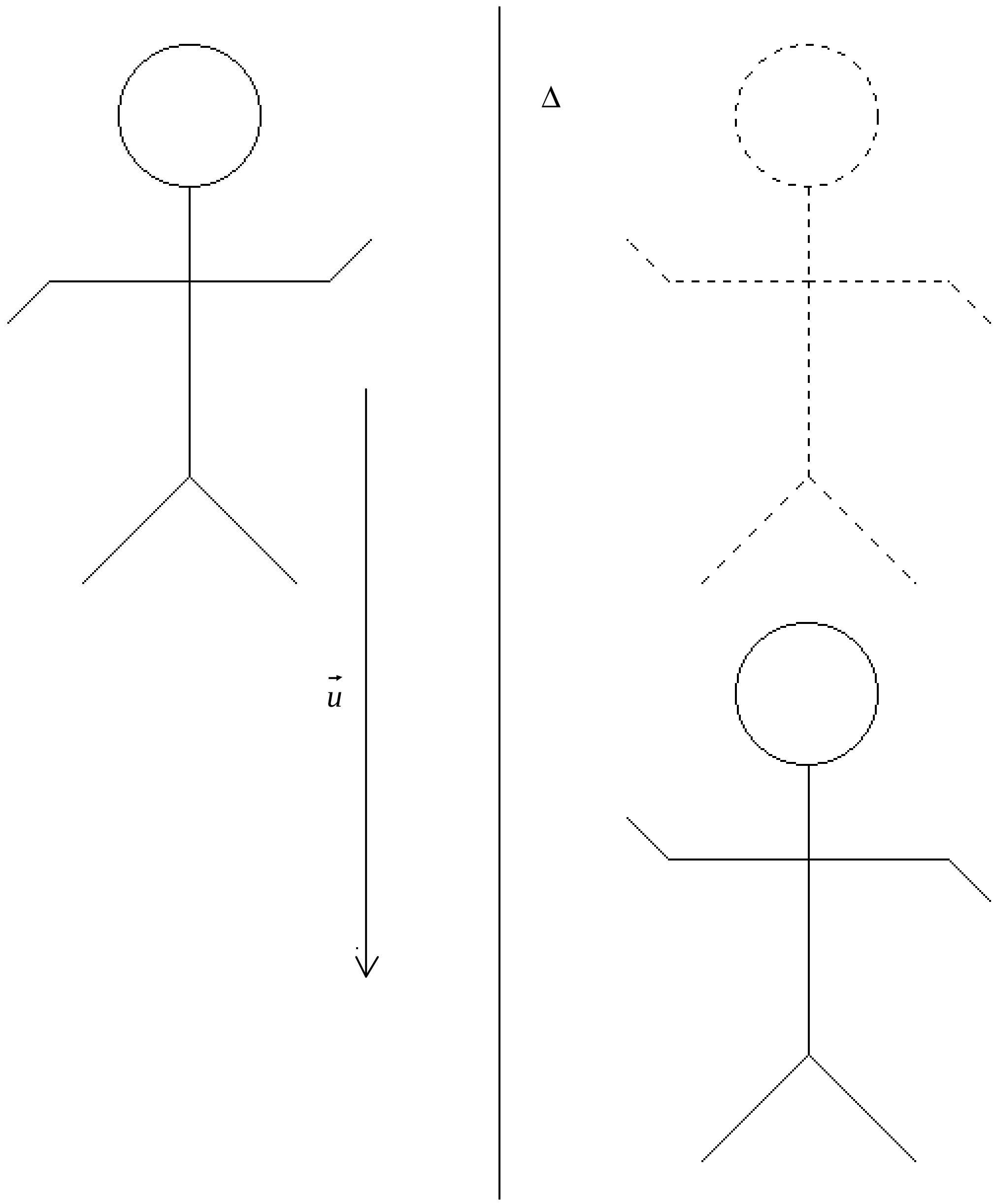
Soit Δ une droite du plan. La *symétrie axiale* d'axe Δ, notée s_Δ , est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $M' = M$ si $M \in \Delta$ et tel que Δ soit la médiatrice de $[MM']$ si $M \notin \Delta$.



A la place de « symétrie axiale », on peut aussi dire « réflexion » ou « symétrie orthogonale ».
La réciproque de la symétrie axiale d'axe Δ est elle-même : $s_\Delta^{-1} = s_\Delta$; $s_\Delta o s_\Delta = id$.
Les points fixes de s_Δ sont les points de Δ .

Soit Δ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ . La *symétrie glissée* d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, notée $s_{\Delta\,;\,\vec{u}}$, est la transformation $t_{\vec{u}} o s_\Delta$.

$s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta = s_\Delta o t_{\vec{u}}$. $s_{\Delta\,;\,\vec{u}} o s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$.
Une symétrie glissée n'a pas de point fixe.
La réciproque de la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.



Δ
$\vec{u}$

Composée de deux symétries axiales — FICHE 3

Soient D_1 et D_2 deux droites du plan. Dans cette fiche nous allons composer les symétries axiales s_1 et s_2 d'axes respectifs D_1 et D_2.

Cas où les droites D_1 et D_2 sont parallèles

Soit M un point quelconque du plan. Soient O_1 et O_2 ses projetés orthogonaux respectifs sur D_1 et D_2. Notons $M' = s_1(M)$ et $M'' = s_2(M')$.

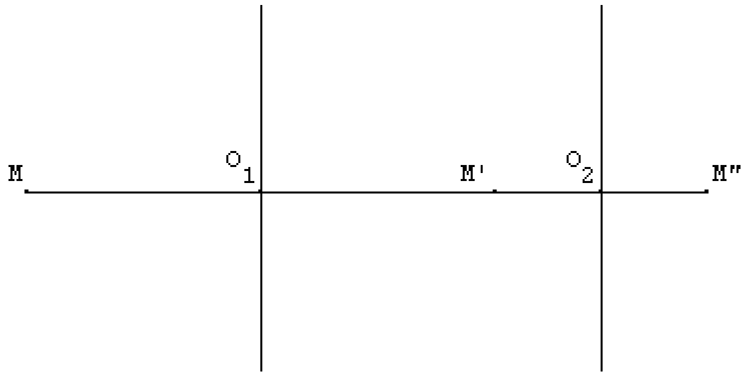
O_1 est le milieu de $[MM']$ ce qui s'écrit aussi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{O_1M'}$.

O_2 est le milieu de $[M'M'']$ ce qui s'écrit aussi $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'O_2}$.

On a alors : $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Il n'est pas difficile de montrer que le vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ ne dépend pas du choix du point M mais dépend uniquement des droites D_1 et D_2.

La composée $s_2 o s_1$ est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_1O_2}$.



La composée $s_2 o s_1$ de deux symétries axiales d'axes D_1 et D_2 parallèles est une translation dont le vecteur est perpendiculaire à ces droites.
Si $\overrightarrow{O_1O_2}$ est un vecteur perpendiculaire à D_1 et D_2 avec $O_1 \in D_1$ et $O_2 \in D_2$, le vecteur de cette translation est $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Remarques

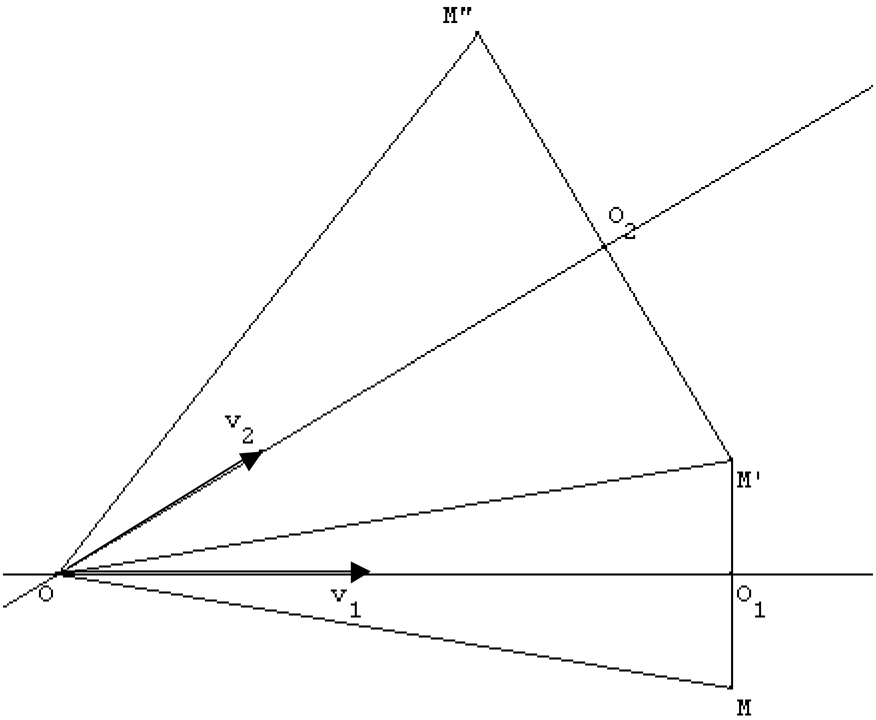
1) Sauf dans le cas où D_1 et D_2 sont confondues et où $s_2 o s_1 = s_1 o s_2 = id$, s_1 et s_2 ne commutent pas : $s_2 o s_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_1O_2}$ et $s_1 o s_2$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_2O_1}$.

2) Toute translation peut donc être décomposée, d'une infinité de manières différentes possibles, comme la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles entre eux et perpendiculaires au vecteur de la translation.

Cas où les droites D_1 et D_2 sont sécantes

Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs de D_1 et D_2 respectivement. Appelons *O* le point d'intersection de D_1 et D_2. Notons $M' = s_1(M)$ et $M'' = s_2(M')$.
Supposons que $M \neq \Omega$.
Nous avons alors : $\left(\overrightarrow{OM} \,;\, \overrightarrow{OM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{v_1} \,;\, \overrightarrow{OM'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OM'} \,;\, \overrightarrow{OM''}\right) = 2\left(\overrightarrow{OM'} \,;\, \overrightarrow{v_2}\right)$ d'où

$\left(\overrightarrow{OM} \,;\, \overrightarrow{OM''}\right) = \left(\overrightarrow{OM} \,;\, \overrightarrow{OM'}\right) + \left(\overrightarrow{OM'} \,;\, \overrightarrow{OM''}\right) = 2\left(\overrightarrow{v_1} \,;\, \overrightarrow{OM'}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM'} \,;\, \overrightarrow{v_2}\right) = 2\left(\overrightarrow{v_1} \,;\, \overrightarrow{v_2}\right)$.
D'autre part : $OM = OM'$ et $OM' = OM''$ d'où $OM = OM''$.



Le point *O* est fixe pour la transformation $s_2 o s_1$.
$s_2 o s_1$ est donc la rotation de centre *O* et d'angle $2\left(\overrightarrow{v_1} \,;\, \overrightarrow{v_2}\right)$.

La composée $s_2 o s_1$ de deux symétries axiales d'axes D_1 et D_2 sécants en *O* est une rotation de centre *O*.
Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2, l'angle de cette rotation est $2\left(\overrightarrow{v_1} \,;\, \overrightarrow{v_2}\right)$.

Remarques

1) L'angle $2\left(\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_2}\right)$ dépend des droites D_1 et D_2 mais pas des vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ choisis sur ces droites.
Si par exemple on remplace $\overrightarrow{v_1}$ par $-\overrightarrow{v_1}$, on a :
$2\left(-\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_2}\right)=2\left(-\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_1}\right)+2\left(\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_2}\right)=2\left(\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_2}\right)\quad [2\pi]$ car $\left(-\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_1}\right)=\pi\quad [2\pi]$.

2) Sauf dans le cas où D_1 et D_2 sont perpendiculaires et où $s_2 \circ s_1 = s_1 \circ s_2 = s_\Omega$ (symétrie centrale de centre *O*, s_1 et s_2 ne commutent pas : $s_2 \circ s_1$ est une rotation d'angle $2\left(\overrightarrow{v_1}\ ;\ \overrightarrow{v_2}\right)$ et $s_1 \circ s_2$ est une rotation d'angle $2\left(\overrightarrow{v_2}\ ;\ \overrightarrow{v_1}\right)$.

3) Toute rotation peut donc être décomposée, d'une infinité de manières différentes possibles, comme la composée de deux symétries axiales d'axes sécants au centre de cette rotation.

4) On verra que toute isométrie du plan peut être obtenue en composant une, deux ou trois symétries axiales.

Isométries du plan fixant un point

FICHE 4

Théorème
Soit f une isométrie et O un point du plan.

L'isométrie f se décompose d'une manière unique sous la forme $f = tog$, où t désigne une translation et g désigne une isométrie laissant O fixe.

Preuve
Soit $f = tog$ une telle décomposition, à supposer qu'elle existe.
On doit avoir $f(O) = (tog)(O) = t(O)$. La translation t ne peut donc être que la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)}$. De plus $f = tog$ d'où $g = t^{-1}of$.
Ce qui précède montre que la décomposition $f = tog$ est, si elle existe, unique.

Posons maintenant $t = t_{\overrightarrow{Of(O)}}$ et $g = t^{-1}of$. g est bien une isométrie comme la composée de deux isométries.
De plus $g(O) = (t^{-1}of)(O) = t^{-1}(f(O)) = O$ donc O est bien un point fixe de g.
Finalement $tog = to(t^{-1}of) = tot^{-1}of = f$. Ceci montre l'existence de la décomposition citée dans le théorème.

Le théorème montre qu'une isométrie quelconque peut toujours être obtenue, et ce d'une infinité de manières (le choix de O est libre), comme composée d'une isométrie laissant un point fixe et d'une translation.

Le théorème suivant va décrire toutes les isométries ayant au moins un point fixe.

Théorème
1) Une isométrie fixant trois points A, B et C non alignés est l'identité.
2) Une isométrie distincte de l'identité fixant au moins deux points distincts A et B est la symétrie axiale d'axe (AB).
3) Une isométrie ne fixant que le point A est une rotation de centre A et d'angle non nul.

Preuve
Soit f une isométrie.
1) Supposons que f fixe trois points A, B et C non alignés. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. f conservant les distances, on doit avoir $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$. Si $M \neq M'$, les trois points A, B et C devraient être tous les trois sur la médiatrice de $[MM']$, ce qui est impossible puisqu'ils ne sont pas alignés.
On a donc $M = M'$ et tous les points sont donc fixes : $f = id$.

2) Supposons que f fixe deux points A et B distincts.
Soit C un point qui n'est pas sur la droite (AB). D'après 1), $f(C) = C' \neq C$ car sinon on aurait $f = id$. f conservant les distances, on doit avoir $AC = AC'$ et $BC = BC'$, donc la droite (AB) est la médiatrice de $[CC']$.
Considérons l'isométrie $g = s_{(AB)} o f$. On voit que $g(A) = A$, $g(B) = B$ et $g(C) = s_{(AB)}(f(C)) = s_{(AB)}(C') = C$. D'après la partie 1) de notre théorème $g = s_{(AB)} o f = id$ d'où, en composant avec $s_{(AB)}$: $s_{(AB)} o (s_{(AB)} o f) = (s_{(AB)} o s_{(AB)}) o f = id o f = f = s_{(AB)} o id = s_{(AB)}$.

3) Supposons que f ne fixe que le point A. Soit B un point distinct de A, $B' = f(B)$ et Δ la médiatrice de $[BB']$. f conservant les distances, on doit avoir $AB = AB'$, ce qui signifie que $A \in \Delta$.
Considérons l'isométrie $g = s_{\Delta} o f$. On voit que $g(A) = s_{\Delta}(f(A)) = s_{\Delta}(A) = A$ et que $g(B) = s_{\Delta}(f(B)) = s_{\Delta}(B') = B$. On peut donc appliquer à g ce que l'on a montré dans la partie 1) ou la partie 2).
Si g était l'identité, on aurait $f = s_{\Delta}$ ce qui est impossible puisque f n'a qu'un seul point fixe.
On a donc $g = s_{\Delta} o f = s_{(AB)}$ d'où $f = s_{\Delta} o s_{(AB)}$: les droites Δ et (AB) étant sécantes en A, f est une rotation de centre A.

Écriture complexe des déplacements

FICHE 5

On va travailler dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

Écriture complexe des translations
La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = z + z_{\vec{u}}$, où $z_{\vec{u}}$ désigne l'affixe de $\vec{u}$.

Écriture complexe des rotations
La rotation $r_{\Omega;a}$ de centre Ω et d'angle α, est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{ia}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

Preuve
Si $z = z_\Omega$, la formule proposée donne bien $z' = z_\Omega$.
Si $z \neq z_\Omega$, $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}$ est un complexe dont le module doit valoir $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et dont un argument doit valoir $(\Omega M\ ;\ \Omega M') = \boldsymbol{a}$ d'après la définition de la rotation.
On a donc $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{ia}$ et la formule annoncée.

Pour résumer, on voit que les translations et les rotations du plan ont une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$.
Dans la cas de la translation : $a = 1$ et $b = z_{\vec{u}}$.
Dans la cas de la rotation : $a = e^{ia}$ et $b = z_\Omega(1 - e^{ia})$.

Réciproquement, si une transformation du plan a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$, on va montrer que c'est une translation ou une rotation.
En effet, si $a = 1$, il s'agit d'une translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
Si $a \neq 1$ la transformation admet pour seule point fixe le point Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.
En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = az + b \\ z_\Omega = az_\Omega + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$ et puisque $|a| = 1$ on peut écrire a sous la forme $a = e^{ia}$. La transformation est donc bien une rotation de centre Ω et d'angle α.

Composée de deux rotations

Soient *f* et *g* deux rotations d'écritures complexes respectives $z' = e^{ia}z + b_1$ et $z' = e^{ib}z + b_2$, la transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe
$z'' = e^{ib}(e^{ia}z + b_1) + b_2 = e^{i(a+b)}z + \left(e^{ib}b_1 + b_2\right)$.
C'est une transformation dont l'expression complexe est bien de la forme $z'' = Az + B$ avec $\left|A\right| = 1$.
Si $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 0 \quad [2\boldsymbol{p}]$, $A = 1$ et gof est une translation.
Si $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \neq 0 \quad [2\boldsymbol{p}]$, $A \neq 1$ et gof est une rotation d'angle $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Composée d'une rotation et d'une translation

Soit *f* une rotation d'écriture complexe $z' = e^{ia}z + b_1$ et *g* une translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.
La transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe
$z'' = (e^{ia}z + b_1) + b_2 = e^{ia}z + (b_1 + b_2)$.
gof est donc une rotation d'angle $\boldsymbol{a}$.

Composée d'une translation et d'une rotation

Soit *f* une translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et *g* une rotation d'écriture complexe $z' = e^{ia}z + b_2$
La transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe
$z'' = e^{ia}(z + b_1) + b_2 = e^{ia}z + \left(e^{ia}b_1 + b_2\right)$.
gof est donc une rotation d'angle $\boldsymbol{a}$.

Description des déplacements du plan

On peut maintenant décrire, avec l'aide des théorèmes de la fiche 4, l'ensemble des déplacements du plan.

En effet le théorème décrivant les isométries fixant un point nous a indiqué que les seuls déplacements fixant au moins un point étaient l'identité et les rotations.

Si un déplacement *f* ne fixe aucun point, il peut, comme toute isométrie, se décomposer sous la forme $f = tog$, où *t* désigne une translation et *g* désigne une isométrie laissant un point *O* fixe. *g* doit être un déplacement sinon $f = tog$ serait un antidéplacement.
g ne peut donc être que l'identité ou une rotation.
Si *g* est l'identité, *f* est une translation.
Si *g* est une rotation, $f = tog$ est une rotation : ce cas n'est pas possible si *f* ne fixe aucun point.

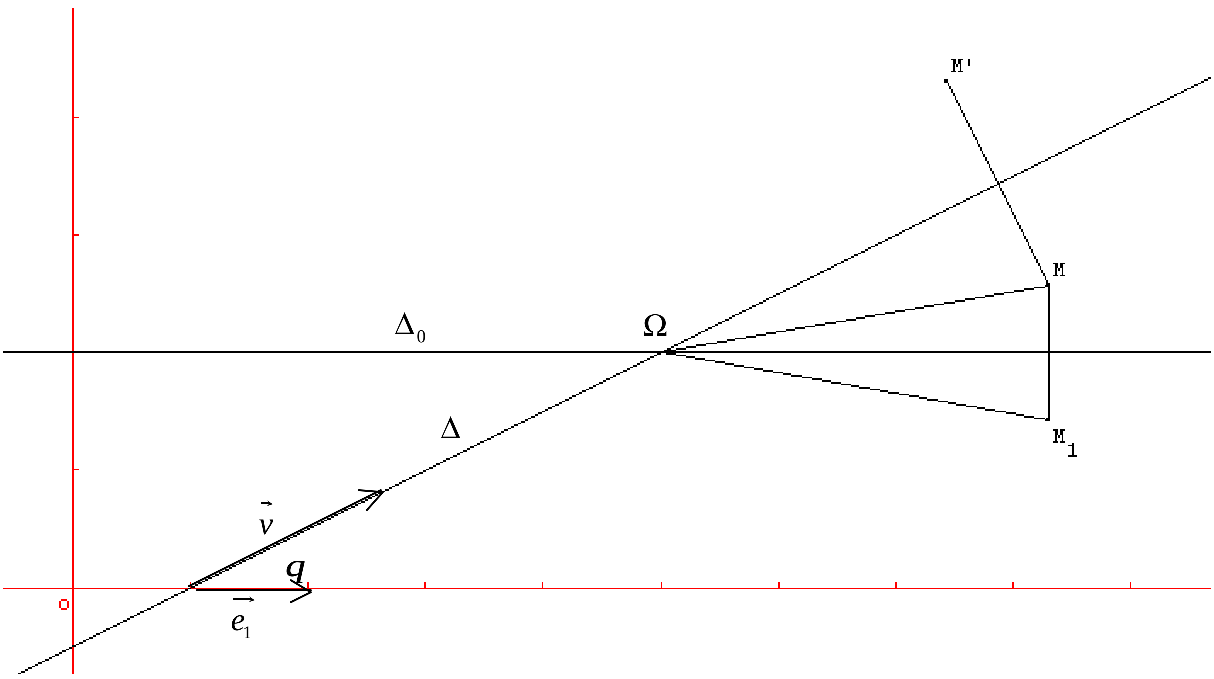
En conclusion : les déplacements du plan sont les translations et les rotations.

Écriture complexe des antidéplacements

FICHE 6

On rappelle que le plan muni est d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\right)$.

Ecriture complexe des symétries axiales
La *symétrie axiale* s_Δ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2q}\left(\bar{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega$ où q désigne une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}\,;\vec{v}\right)$.



Preuve
Soit Δ_0 la droite contenant Ω et parallèle à l'axe des abscisses et soit s la symétrie d'axe Δ_0 .
L'isométrie $s_\Delta o s$ est la rotation $r_{\Omega\,;\,2q}$ de centre Ω et d'angle $2q$.
Puisque $r_{\Omega\,;\,2q} = s_\Delta o s$, on a : $s_\Delta = (s_\Delta o s) o s = r_{\Omega\,;\,2q} o s$.
Déterminons d'abord l'écriture complexe de s. Si M est un point d'affixe z, appelons M_1 son image par s et z_1 son affixe.

Supposons $z \neq z_\Omega$ et calculons $\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\bar{z} - \overline{z_\Omega}}$.

$$\Omega M = \Omega M_1 \text{ donc } \left|\frac{z_1 - z_\Omega}{\bar{z} - \overline{z_\Omega}}\right| = \frac{|z_1 - z_\Omega|}{\left|\overline{z - z_\Omega}\right|} = \frac{|z_1 - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = \frac{\Omega M_1}{\Omega M} = 1 .$$

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_\Omega}{\bar{z} - \overline{z_\Omega}}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) - \arg\left(\bar{z} - \overline{z_\Omega}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) - \arg\left(\overline{z - z_\Omega}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) + \arg(z - z_\Omega)$$
$$= \left(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \quad \text{puisque} \quad \left(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right).$$
.

On a donc : $\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}} = 1$ et $z_1 - z_\Omega = \overline{z} - \overline{z_\Omega}$, égalité valable même si $z = z_\Omega$.

Il reste à composer s avec $r_{\Omega\,;\,2q}$ pour trouver $s_\Delta = r_{\Omega\,;\,2q} o s$.

$s : M \mapsto M_1 \quad r_{\Omega\,;\,2q} : M_1 \mapsto M' \qquad : \qquad z' - z_\Omega = e^{2iq}\left(z_1 - z_\Omega\right) = e^{2iq}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right)$, d'où le résultat.

Représentation complexe des symétries glissées

La *symétrie glissée* $s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2q}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega + z_{\vec{u}}$ où q désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{e_1}\,;\,\vec{v}\right)$.

Pour résumer, on voit que les symétries axiales et les symétries glissées du plan ont une écriture complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|\,a\,| = 1$.

Dans la cas de la symétrie axiale: $a = e^{i2q}$ et $b = -e^{i2q}\,\overline{z_\Omega} + z_\Omega$.

Dans la cas de la symétrie glissée : $a = e^{i2q}$ et $b = -e^{i2q}\,\overline{z_\Omega} + z_\Omega + z_{\vec{u}}$.

Réciproquement, si une transformation du plan a une écriture complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|\,a\,| = 1$, on peut montrer qu'il s'agit d'une symétrie axiale ou une symétrie glissée .

Dans le cas où la transformation admet un point fixe Ω la preuve est facile. En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = a\overline{z} + b \\ z_\Omega = a\overline{z_\Omega} + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_\Omega = a(\overline{z} - \overline{z_\Omega})$. En écrivant a sous la forme e^{i2q} , on voit que $z' = e^{i2q}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega$: c'est bien l'écriture d'une symétrie axiale.

Comment reconnaître une symétrie axiale et une symétrie glissée

Soit une transformation f d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|\,a\,| = 1$.

Si f est une symétrie axiale, pour tout point M, le milieu de $[Mf(M)]$ doit être fixe, en particulier le milieu de $[Of(O)]$ doit être fixe. Réciproquement si le milieu de $[Of(O)]$ est fixe alors f est une symétrie axiale puisqu'une symétrie glissée n'a aucun point fixe.

$f(O)$ a pour affixe b et le milieu de $[Of(O)]$ a pour affixe $\dfrac{b}{2}$.

f est une symétrie axiale si et seulement si : $\dfrac{b}{2} = a\overline{\left(\dfrac{b}{2}\right)} + b$, condition qui s'écrit aussi :

$$\boxed{a\overline{b} + b = 0}.$$

On peut également retrouver cette condition en considérant que, si f est une symétrie axiale, $fof = id$ tandis que si f est une symétrie glissée $f = s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$, on aura $fof = t_{2\vec{u}}$.

Cette deuxième méthode permet de plus de déterminer le vecteur $\vec{u}$ à partir de l'écriture complexe d'une symétrie glissée.

Composée de deux symétries axiales

Soient *f* et *g* deux symétries axiales d'écritures complexes respectives $z' = a_1\overline{z} + b_1$ et $z' = a_2\overline{z} + b_2$, la transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe $z'' = a_2\overline{(a_1\overline{z} + b_1)} + b_2 = a_2\overline{a_1}z + a_2\overline{b_1} + b_2$.
C'est une transformation dont l'écriture complexe est bien de la forme $z'' = Az + B$ avec $|A| = 1$ puisque $A = a_2\overline{a_1}$ et $|A| = |a_2\overline{a_1}| = |a_2| \times |\overline{a_1}| = |a_2| \times |a_1| = 1$. C'est donc un déplacement (translation ou rotation) comme on l'a vu dans la fiche 3.

Composée d'une symétrie axiale ou d'une symétrie glissée et d'une translation

Soit *f* une symétrie axiale ou glissée d'écriture complexe $z' = a_1\overline{z} + b_1$ avec $|a_1| = 1$ et *g* une translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.
La transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe $z'' = (a_1\overline{z} + b_1) + b_2 = a_1\overline{z} + (b_1 + b_2)$.
gof est donc une symétrie axiale ou glissée.

Composée d'une translation et d'une symétrie axiale ou d'une symétrie glissée

Soit *f* une translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et g une symétrie axiale ou glissée d'écriture complexe $z' = a_2\overline{z} + b_2$ avec $|a_2| = 1$.
La transformation gof associe, à tout point *M* d'affixe *z* le point M'' d'affixe $z'' = a_2\overline{(z + b_1)} + b_2 = a_2\overline{z} + \left(a_2\overline{b_1} + b_2\right)$.
gof est donc une symétrie axiale ou glissée.

Description des antidéplacements du plan

On peut maintenant décrire, avec l'aide des théorèmes de la fiche 4, l'ensemble des antidéplacements du plan.

En effet le théorème décrivant les isométries fixant un point nous a indiqué que les seuls antidéplacements fixant au moins un point étaient les symétries axiales.

Si un antidéplacement *f* ne fixe aucun point, il peut, comme toute isométrie, se décomposer sous la forme $f = tog$, où *t* désigne une translation et *g* désigne une isométrie laissant un point *O* fixe. *g* doit être un antidéplacement sinon $f = tog$ serait un déplacement.
g ne peut donc être qu'une symétrie axiale.
$f = tog$ est alors une symétrie axiale ou glissée : puisque *f* ne fixe aucun point, c'est une symétrie glissée.

En conclusion : les antidéplacements du plan sont les symétries axiales et les symétries glissées.

Homothéties

Définition
Soit Ω un point du plan et k un réel non nul. L'*homothétie* de centre Ω et de rapport k, notée $h_{\Omega\,;\,k}$ est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que
$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Cas particuliers et premières propriétés
Si $k = 1$, $h_{\Omega\,;k} = id$. Si $k \neq 1$, Ω est le seul point fixe de $h_{\Omega\,;\,k}$.

Si $k = -1$, $h_{\Omega;\,k} = s_{\Omega}$. Les symétries centrales sont aussi les homothéties de rapport -1.

$h_{\Omega\,;\,k}$ est une bijection ; la bijection réciproque est $h_{\Omega\,;1/k}$.

Si A et B sont deux points, et A' et B' leurs images par $h_{\Omega\,;\,k}$, on a : $\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}$, d'où par différence : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et donc $A'B' = |\,k\,|\,AB$.

Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par $|\,k\,|$ et les aires par k^2.
Les seules homothéties qui sont des isométries sont l'identité ($k = 1$) et les symétries centrales ($k = -1$).

On peut démontrer que les homothéties transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.

Plus précisément, en conservant les notations précédentes :

- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = |\,k\,|\,AB$;
- l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ qui est parallèle à (AB);
- l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon $|\,k\,|r$.

Les homothéties conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres et les angles orientés (que leur rapport soit positif ou négatif).

Écriture complexe des homothéties
L'homothétie $h_{\Omega\,;\,k}$ de centre Ω et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$.

Preuve
Il suffit de traduire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

On obtient donc une écriture complexe de la forme $z' = kz + b$ avec $b = (1-k)z_{\Omega}$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un réel non nul et b un complexe est :

- l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;
- une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$;
- une homothétie de rapport a si $a \neq 1$.

Preuve

Il suffit de vérifier que si $a \neq 1$ la transformation est bien une homothétie de rapport a.

En posant $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$, on a $z_\Omega = az_\Omega + b$ et en faisant la différence membre à membre avec $z' = az + b$, on obtient $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$: il s'agit bien de l'homothétie de centre Ω et de rapport a.

Composée d'une homothétie et d'une translation

Soit f une homothétie de rapport k $(\neq 1)$ d'écriture complexe $z' = kz + b_1$ et g une translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.

La transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$z'' = (kz + b_1) + b_2 = kz + (b_1 + b_2)$.

gof est donc une homothétie de rapport k.

Composée d'une translation et d'une homothétie

Soit f une translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et g une homothétie de rapport k $(\neq 1)$ d'écriture complexe $z' = kz + b_2$

La transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$z'' = k(z + b_1) + b_2 = kz + (kb_1 + b_2)$.

gof est donc une homothétie de rapport k.

Composée de deux homothéties

Soient f et g deux homothéties d'écritures complexes respectives $z' = k_1 z + b_1$ et $z' = k_2 z + b_2$, la transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$z'' = k_2(k_1 z + b_1) + b_2 = k_1 k_2 z + (k_2 b_1 + b_2)$.

C'est une transformation dont l'expression complexe est de la forme $z'' = Kz + B$ où K est un réel.

Si $K = k_1 k_2 = 1$, gof est une translation.

Sinon gof est une homothétie de rapport $K = k_1 k_2$.

Remarque En général, $gof \neq fog$. Si gof et donc également fog sont des homothéties, on peut montrer que les centres de f, g, gof et fog sont alignés.

Similitudes directes FICHE 8

Définition
Soit Ω un point du plan, a un angle orienté et k un réel strictement positif. La similitude directe de centre Ω, d'angle a et de rapport k, est la composée $r_{\Omega;a} o\, h_{\Omega;k}$.

Cas particuliers et premières propriétés
On vérifiera plus loin que $r_{\Omega;a} o\, h_{\Omega;k} = h_{\Omega;k} o r_{\Omega;a}$.

Avec $k = 1$, on retrouve les rotations comme similitudes directes particulières.
On considère également les translations comme étant des similitudes directes particulières.
Bien entendu les translations n'ont ni centre, ni angle, ni rapport mais sont définies par leur vecteur. Ainsi tous les déplacements sont considérés comme des similitudes directes.

Avec $a = 0$, on retrouve les homothéties de rapport positif comme similitudes directes particulières. Avec $a = p$, on retrouve les homothéties de rapport négatif.
Ainsi tous les homothéties sont considérés comme des similitudes directes.
Remarque : une homothétie de centre Ω et de rapport k $(k < 0)$ est considérée comme une similitude directe de centre Ω, d'angle p et de rapport $-k = |k|$. Il faut donc être prudent lorsque l'on parle du rapport d'une telle homothétie.

Les propriétés des similitudes directes découlent des propriétés des rotations et des homothéties.

Une similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2 .

Les similitudes directes transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.
Plus précisément, avec les notations habituelles :

- l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = kAB$;
- l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$;
- l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr .

Les similitudes directes conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres et les angles orientés.

Écriture complexe des similitudes directes
La similitude directe de centre Ω, d'angle a et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = ke^{ia}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

Preuve
Il suffit de traduire la définition, en utilisant l'écriture complexe des homothéties et des rotations.
On obtient donc une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a = ke^{ia}$ $b = (1-a)z_\Omega$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe est :

- l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;
- une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$;
- une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ si $a \neq 1$.

Preuve

Il suffit de vérifier que si $a \neq 1$ la transformation est bien une similitude directe de rapport $|a| = k$ et d'angle $\arg(a) = \alpha$.

En posant $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$, on a $z_\Omega = az_\Omega + b$ et en faisant la différence membre à membre avec $z' = az + b$, on obtient $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega) = ke^{i\alpha}(z - z_\Omega)$: Il s'agit bien de l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, d'angle α et de rapport k.

Composée de deux similitudes directes

Soient f et g deux similitudes directes d'écritures complexes respectives $z' = a_1 z + b_1$ et $z' = a_2 z + b_2$, la transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' = a_2(a_1 z + b_1) + b_2 = a_1 a_2 z + (a_2 b_1 + b_2)$.

C'est une transformation dont l'expression complexe est de la forme $z'' = Az + B$ où A est un complexe non nul.

C'est donc une similitude directe.

Composée de deux similitudes directes de même centre

Si f et g ont le même centre Ω et ont pour écritures complexes respectives $z' - z_\Omega = a_1(z - z_\Omega)$ et $z' - z_\Omega = a_2(z - z_\Omega)$, la similitude directe gof associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe $z'' - z_\Omega = a_1 a_2 (z - z_\Omega)$ ce qui montre :

- que son centre est Ω ;
- que f et g commutent ($gof = fog$).

Ce même calcul permet de vérifier que la réciproque de la similitude directe de centre Ω, d'angle α et de rapport k est la similitude directe de centre Ω, d'angle $-\alpha$ et de rapport $\dfrac{1}{k}k$.

TP - Groupes de transformations

FICHE 9

On rappelle que toutes les transformations considérées sont bijectives.

Définition
Un groupe de transformations du plan est un ensemble G de transformations du plan possédant les propriétés suivantes :
1) G contient la transformation identique *id*.
2) Si f et g sont des éléments de G, gof est aussi un élément de G.
3) Si f est un élément de G, sa réciproque f^{-1} est aussi un élément de G.

Exemples
L'ensemble de toutes les translations du plan est un groupe.
L'ensemble de tous les déplacements du plan est un groupe.
L'ensemble de toutes les isométries du plan est un groupe.
L'ensemble de toutes les similitudes directes du plan est un groupe.
L'ensemble contenant toutes les translations et les homothéties du plan est un groupe.

Exercice
Soit F une figure du plan. L'ensemble de toutes les isométries du plan telles que $f(F) = F$ est un groupe.

Déterminer ce groupe dans le cas où :
1. F est un triangle isocèle non équilatéral ;
2. F est un triangle équilatéral ;
3. F est un rectangle non carré ;
4. F est un losange non carré ;
5. F est un carré ;
6. F est un hexagone régulier.

Pour chaque cas, dresser la table de Pythagore du groupe.

Composée de deux isométries **ANNEXE**

→	Translation	Rotation	Symétrie axiale	Symétrie glissée
Translation	Translation	Rotation	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée
Rotation	Rotation	Rotation ou translation	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée
Symétrie axiale	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée	Rotation ou translation	Rotation ou translation
Symétrie glissée	Symétrie axiale ou glissée	Symétrie axiale ou glissée	Rotation ou translation	Rotation ou translation

Dans ce tableau, *id* est considérée comme une translation (et non comme une rotation). Les déplacements sont écrits en vert et les antidéplacements en rouge.