Equations du second degré   SAI.Fethi

Définition

Tout équation qui se ramène à la forme :

$$ax^2+bx+c=0; a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$$

est une équation du second degré.

Résolution :

Soit (E) une équation du second degré.

$S_{\mathbb{R}}$ **désigne l'ensemble de solutions de (E).**

1. **Le cas général :**
   - ❖ **En utilisant le discriminant** Δ **:** $\Delta=b^2-4\times a\times c$.
     - **Si** $\Delta\prec 0\Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\varnothing.$
     - **Si** $\Delta=0\Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}.$
     - **Si** $\Delta\succ 0\Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$
   - ❖ **En utilisant le discriminant réduit** Δ' **:**

     $\Delta'=(b')^2-a\times c\ \ avec\ \ \ b'=\frac{b}{2}.$
     - **Si** $\Delta'\prec 0\Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\varnothing.$
     - **Si** $\Delta'=0\Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-b'}{a}\right\}.$
     - **Si** $\Delta'\succ 0\Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a},\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right\}.$

Théorème : Si $\Delta\geq 0$ **l'équation (E) admet deux solutions** x_1 **et** x_2 **et on a de plus :**

$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ **;** $P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ **et** $ax^2+bx+c=a\times(x-x_1)\times(x-x_2)$**.**

$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$ **s'appelle la forme canonique.**

2. **Des cas particuliers :**
   - ❖ **Le cas : c = 0 :**

     (E) $\Leftrightarrow ax^2+bx=0\Leftrightarrow x\times(ax+b)=0$

     $\Leftrightarrow x=0\ \ \ ou\ \ x=\frac{-b}{a}$ **et par suite** $S_{\mathbb{R}}=\left\{0,\frac{-b}{a}\right\}.$
   - ❖ **Le cas : b = 0 :   La forme** x^2 **= a.**

     (E) $\Leftrightarrow ax^2+c=0\Leftrightarrow ax^2=-c\Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}$ **:**

- **Si** $\frac{-c}{a} \prec 0$ **(c et a sont de même signe) alors** $S_{\mathbb{R}} = \varnothing.$
- **Si** $\frac{-c}{a} \succ 0$ **(c et a sont de signes contraires)**

  alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \sqrt{\frac{-c}{a}}, -\sqrt{\frac{-c}{a}} \right\}$**.**

❖ **Si a+b+c=0 alors** $S_{\mathbb{R}} = \left\{ 1, \frac{c}{a} \right\}.$

❖ **Si a-b+c=0 alors** $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -1, \frac{-c}{a} \right\}.$

❖ **Si** x_0 **est une solution évidente et non nulle de (E)**

alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{ x_0, \frac{c}{a \times x_0} \right\}.$